Notes

Noël DUBRAY

11 juillet 2006

Table des matières

Chapitre 1

Passage d'une base de bon simplex Y à une base de bon simplex X

1.1 Opérateurs

1.1.1 Opérateurs de simplex X et de simplex Y

Ils sont définis de la façon suivante :

$$
\begin{array}{rcccl}
\hat{S}_x & \equiv & e^{-i\pi\hat{j}_x}\hat{\pi} & = & e^{-i\pi\hat{l}_x}e^{-i\pi\hat{s}_x}\hat{\pi} \\
& = & e^{-i\pi\hat{l}_x}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_x}\hat{\pi} & = & e^{-i\pi\hat{l}_x}(cos(\frac{\pi}{2}) - i\sigma_x sin(\frac{\pi}{2}))\hat{\pi} \\
& = & e^{-i\pi\hat{l}_x}(-i\sigma_x)\hat{\pi} & & \\
\hat{S}_y & \equiv & e^{-i\pi\hat{j}_y}\hat{\pi} & = & e^{-i\pi\hat{l}_y}e^{-i\pi\hat{s}_y}\hat{\pi} \\
& = & e^{-i\pi\hat{l}_y}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y}\hat{\pi} & = & e^{-i\pi\hat{l}_y}(cos(\frac{\pi}{2}) - i\sigma_y sin(\frac{\pi}{2}))\hat{\pi} \\
& = & e^{-i\pi\hat{l}_y}(-i\sigma_y)\hat{\pi} & &
\end{array}
\tag{1.1}
$$

où $\hat{\pi}$ est l'opérateur parité, σ_x et σ_y sont des matrices de Pauli.

On rappelle leurs expressions :

$$
\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.2}
$$

L'opérateur $\hat{S}_x$ (resp. $\hat{S}_y$) correspond à une réflexion par rapport au plan π_{yz} (resp. π_{xz}). On peut remarquer qu'il peut être décomposé en une symétrie d'axe Ox (resp. Oy) suivie d'une symétrie centrale. Les valeurs propres de ces opérateurs sont i ou $-i$ car on doit avoir $\hat{S}_\mu^2 = -1$, valeur propre qui est liée à la nature fermionique des particules considérées.

1.1.2 Opérateur de renversement du temps

De façon générale, l'opérateur de renversement du temps est de la forme suivante :

$$
\hat{T} \equiv U\hat{K} \tag{1.3}
$$

où U est une matrice unitaire et $\hat{K}$ est l'opérateur de conjugaison. Par la suite nous utiliserons la convention dite de Condon Shortley (C.S.) :

$$
U \equiv +i\sigma_y \tag{1.4}
$$

$$
\hat{T} \equiv +i\sigma_y\hat{K} \tag{1.5}
$$

1.2 Conventions de notation

Par la suite nous utiliserons la notation $|n_x n_y n_z\rangle$ pour désigner l'état de l'oscillateur harmonique défini par les nombres quantiques n_x, n_y et n_z.

Nous utiliserons aussi la notation $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ pour désigner l'état de spin $\pm\frac{1}{2}$.

Enfin, nous utiliserons la notation suivante :

$$|n_x n_y n_z, \pm\frac{1}{2}\rangle \quad \equiv \quad |n_x n_y n_z\rangle \otimes |\pm\frac{1}{2}\rangle \tag{1.6}$$

1.3 Construction d'une base de bon simplex Y

1.3.1 Base B

Elle est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} |b\rangle & \equiv & i^{n_y}|n_x n_y n_z, \frac{1}{2}\rangle \\ |\overline{b}\rangle & \equiv & \hat{T}|b\rangle \\ & = & -i^{-n_y}|n_x n_y n_z, -\frac{1}{2}\rangle \end{array}} \tag{1.7}$$

Elle possède la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{S}_y|b\rangle & = & -|\overline{b}\rangle \\ \hat{S}_y|\overline{b}\rangle & = & +|b\rangle \end{array} \right. \tag{1.8}$$

1.3.2 Base T

Elle est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} |t_+\rangle & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + i|\overline{b}\rangle) \\ |t_-\rangle & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|b\rangle - |\overline{b}\rangle) \end{array}} \tag{1.9}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{S}_y|t_+\rangle & = & (+i)|t_+\rangle \\ \hat{S}_y|t_-\rangle & = & (-i)|t_-\rangle \end{array} \right. \tag{1.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \hat{T}|t_+\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{b}\rangle + i|b\rangle) & = & -|t_-\rangle \\ \hat{T}|t_-\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\overline{b}\rangle + |b\rangle) & = & +|t_+\rangle \end{array} \right. \tag{1.11}$$

Le fait que le simplex soit conservé dans cette base nous permet de l'appeler “une base de bon simplex Y”.

1.4 Construction d'une base de bon simplex X

1.4.1 Base A

Elle est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} |a\rangle & \equiv & i^{n_x}|n_x n_y n_z, \frac{1}{2}\rangle \\ |\overline{a}\rangle & \equiv & \hat{T}|a\rangle \\ & = & i^{-n_x}|n_x n_y n_z, -\frac{1}{2}\rangle \end{array}} \tag{1.12}$$

Elle possède la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{S}_x|a\rangle & = & (-i)|\overline{a}\rangle \\ \hat{S}_x|\overline{a}\rangle & = & (-i)|a\rangle \end{array} \right. \tag{1.13}$$

1.4.2 Base U

Elle est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} |u_+\rangle & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle - |\overline{a}\rangle) \\ |u_-\rangle & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |\overline{a}\rangle) \end{array}} \tag{1.14}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{S}_x|u_+\rangle & = & (+i)|u_+\rangle \\ \hat{S}_x|u_-\rangle & = & (-i)|u_-\rangle \end{array} \right. \tag{1.15}$$

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \hat{T}|u_+\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{a}\rangle + |a\rangle) & = & +|u_-\rangle \\ \hat{T}|u_-\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{a}\rangle - |a\rangle) & = & -|u_+\rangle \end{array} \right. \tag{1.16}$$

Le fait que le simplex soit conservé dans cette base nous permet de l'appeler “une base de bon simplex X”.

1.5 Relations

Relations entre $|b\rangle$ et $|t\rangle$ (inverses des relations 1.9) :

$$\begin{array}{lcl} |b\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|t_+\rangle + i|t_-\rangle) \\ |\overline{b}\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|t_+\rangle - |t_-\rangle) \end{array} \tag{1.17}$$

Relations entre $|a\rangle$ et $|u\rangle$ (inverses des relations 1.14) :

$$\begin{array}{lcl} |a\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_+\rangle + |u_-\rangle) \\ |\overline{a}\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_-\rangle - |u_+\rangle) \end{array} \tag{1.18}$$

Relations entre $|a\rangle$ et $|b\rangle$:

$$\begin{array}{lcl} |a\rangle & = & i^{n_x - n_y}|b\rangle \\ & = & i^N|b\rangle \\ |\overline{a}\rangle & = & i^{-(n_x - n_y)}|\overline{b}\rangle \\ & = & i^{-N}|\overline{b}\rangle \end{array} \tag{1.19}$$

où $N = n_x - n_y$.

Relations entre $|u\rangle$ et $|t\rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{lclclclcl} |u_+\rangle & = & \frac{1}{2}((i^N + i^{1-N}) & |t_+\rangle & + & (i^{N+1} + i^{-N}) & |t_-\rangle) \\ \\ |u_-\rangle & = & \frac{1}{2}((i^N - i^{1-N}) & |t_+\rangle & + & (i^{N+1} - i^{-N}) & |t_-\rangle) \end{array} \right. \tag{1.20}$$

$$\left\{ \begin{array}{lclclclcl} |t_+\rangle & = & \frac{1}{2}((i^{-N} - i^{N+1}) & |u_+\rangle & + & (i^{-N} + i^{N+1}) & |u_-\rangle) \\ \\ |t_-\rangle & = & \frac{1}{2}((i^N - i^{1-N}) & |u_+\rangle & - & (i^N + i^{1-N}) & |u_-\rangle) \end{array} \right. \tag{1.21}$$

qui peut s'écrire, en utilisant la notation matricielle :

$$
\begin{bmatrix} |u_+\rangle \\ \\ |u_-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(i^N + i^{1-N}) & \frac{1}{2}(i^{N+1} + i^{-N}) \\ \\ \frac{1}{2}(i^N - i^{1-N}) & \frac{1}{2}(i^{N+1} - i^{-N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |t_+\rangle \\ \\ |t_-\rangle \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} |t_+\rangle \\ \\ |t_-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(i^{-N} - i^{N+1}) & \frac{1}{2}(i^{-N} + i^{N+1}) \\ \\ \frac{1}{2}(i^N - i^{1-N}) & \frac{1}{2}(-i^N - i^{1-N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |u_+\rangle \\ \\ |u_-\rangle \end{bmatrix} \tag{1.22}
$$

Introduisons les termes suivants :

$$
\begin{array}{rcrcl} f & \equiv & f_N & = & \frac{1}{2}(i^N + i^{1-N}) \\ g & \equiv & g_N & = & \frac{1}{2}(i^{N+1} + i^{-N}) \end{array} \tag{1.23}
$$

Finalement nous obtenons :

$$
\boxed{\begin{matrix} |u_+\rangle \\ \\ |u_-\rangle \end{matrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ \\ g^* & -f^* \end{bmatrix} \begin{matrix} |t_+\rangle \\ \\ |t_-\rangle \end{matrix}} \tag{1.24}
$$

Calculons :

$$
\begin{aligned} \langle u'_+|\hat{J}_x|u_+\rangle &= (f'^*\langle t'_+| + g'^*\langle t'_-|)\hat{J}_x(f|t_+\rangle + g|t_-\rangle) \\ &= f'^*g\langle t'_+|\hat{J}_x|t_-\rangle + g'^*f\langle t'_-|\hat{J}_x|t_+\rangle \end{aligned}
$$

car :

$$
\langle t'_+|\hat{J}_x|t_+\rangle = 0 \tag{1.25}
$$

$$
\langle t'_-|\hat{J}_x|t_-\rangle = 0 \tag{1.26}
$$

ensuite :

$$
\begin{aligned} \langle u'_-|\hat{J}_x|u_-\rangle &= (g'\langle t'_+| - f'\langle t'_-|)\hat{J}_x(g^*|t_+\rangle - f^*|t_-\rangle) \\ &= -g'f^*\langle t'_+|\hat{J}_x|t_-\rangle - f'g^*\langle t'_-|\hat{J}_x|t_+\rangle \\ -\langle u'_-|\hat{J}_x|u_-\rangle^* &= g'^*f\langle t'_+|\hat{J}_x|t_-\rangle^* + f'^*g\langle t'_-|\hat{J}_x|t_+\rangle^* \\ &= g'^*f\langle t'_-|\hat{J}_x|t_+\rangle + f'^*g\langle t'_+|\hat{J}_x|t_-\rangle \end{aligned}
$$

car :

$$
\langle t'_-|\hat{J}_x|t_+\rangle^* = \langle t'_+|\hat{J}_x|t_-\rangle \tag{1.27}
$$

finalement, nous trouvons :

$$
\boxed{\langle u'_+|\hat{J}_x|u_+\rangle = -\langle u'_-|\hat{J}_x|u_-\rangle^*} \tag{1.28}
$$

1.6 Quelques propriétés

$$
\boxed{\hat{T}\hat{\vec{j}}\hat{T}^{-1} = -\hat{\vec{j}}} \tag{1.29}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl} \langle a'|\hat{\vec{j}}|a\rangle & = & -\langle a'|\hat{T}^{-1}\hat{\vec{j}}\hat{T}|a\rangle & = & -\langle \overline{a}'|\hat{\vec{j}}|\overline{a}\rangle^* \\ \langle a'|\hat{\vec{j}}|\overline{a}\rangle & = & -\langle a'|\hat{T}^{-1}\hat{\vec{j}}\underbrace{\hat{T}\hat{T}}_{=-1}|a\rangle & = & +\langle \overline{a}'|\hat{\vec{j}}|a\rangle^* \end{array} \tag{1.30}
$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \hat{S}_x^{-1}\hat{j}_x\hat{S}_x & = & +\hat{j}_x \\ \hat{S}_x^{-1}\hat{j}_y\hat{S}_x & = & -\hat{j}_y \\ \hat{S}_x^{-1}\hat{j}_z\hat{S}_x & = & -\hat{j}_z \end{array}} \tag{1.31}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcccccccl} \langle a'|\hat{j}_x|a\rangle & = & +\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_x\hat{S}_x|a\rangle & = & -\langle\overline{a}'|\hat{j}_x|\overline{a}\rangle & = & +\langle a'|\hat{j}_x|a\rangle^* & \in & \mathbb{R} \\ \langle a'|\hat{j}_x|\overline{a}\rangle & = & +\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_x\hat{S}_x|\overline{a}\rangle & = & -\langle\overline{a}'|\hat{j}_x|a\rangle & = & -\langle a'|\hat{j}_x|\overline{a}\rangle^* & \in & i\mathbb{R} \end{array}} \tag{1.32}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcccccccl} \langle a'|\hat{j}_y|a\rangle & = & -\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_y\hat{S}_x|a\rangle & = & +\langle\overline{a}'|\hat{j}_y|\overline{a}\rangle & = & -\langle a'|\hat{j}_y|a\rangle^* & \in & i\mathbb{R} \\ \langle a'|\hat{j}_y|\overline{a}\rangle & = & -\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_y\hat{S}_x|\overline{a}\rangle & = & +\langle\overline{a}'|\hat{j}_y|a\rangle & = & +\langle a'|\hat{j}_y|\overline{a}\rangle^* & \in & \mathbb{R} \end{array}} \tag{1.33}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcccccccl} \langle a'|\hat{j}_z|a\rangle & = & -\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_z\hat{S}_x|a\rangle & = & +\langle\overline{a}'|\hat{j}_z|\overline{a}\rangle & = & -\langle a'|\hat{j}_z|a\rangle^* & \in & i\mathbb{R} \\ \langle a'|\hat{j}_z|\overline{a}\rangle & = & -\langle a'|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_z\hat{S}_x|\overline{a}\rangle & = & +\langle\overline{a}'|\hat{j}_z|a\rangle & = & +\langle a'|\hat{j}_z|\overline{a}\rangle^* & \in & \mathbb{R} \end{array}} \tag{1.34}$$

$$\begin{array}{rcccl} \langle u'_+|\hat{\vec{j}}|u_+\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{T}^{-1}\hat{\vec{j}}\hat{T}|u_+\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{\vec{j}}|u_-\rangle^* \\ \langle u'_+|\hat{\vec{j}}|u_-\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{T}^{-1}\hat{\vec{j}}\hat{T}|u_-\rangle & = & +\langle u'_-|\hat{\vec{j}}|u_+\rangle^* \end{array} \tag{1.35}$$

$$\begin{array}{rcccccl} \langle u'_+|\hat{j}_x|u_-\rangle & = & +\langle u'_+|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_x\hat{S}_x|u_-\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{j}_x|u_-\rangle & = & 0 \\ \langle u'_-|\hat{j}_x|u_+\rangle & = & +\langle u'_-|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_x\hat{S}_x|u_+\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{j}_x|u_+\rangle & = & 0 \end{array} \tag{1.36}$$

$$\begin{array}{rcccccl} \langle u'_+|\hat{j}_y|u_+\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_y\hat{S}_x|u_+\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{j}_y|u_+\rangle & = & 0 \\ \langle u'_-|\hat{j}_y|u_-\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_y\hat{S}_x|u_-\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{j}_y|u_-\rangle & = & 0 \end{array} \tag{1.37}$$

$$\begin{array}{rcccccl} \langle u'_+|\hat{j}_z|u_+\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_z\hat{S}_x|u_+\rangle & = & -\langle u'_+|\hat{j}_z|u_+\rangle & = & 0 \\ \langle u'_-|\hat{j}_z|u_-\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{S}_x^{-1}\hat{j}_z\hat{S}_x|u_-\rangle & = & -\langle u'_-|\hat{j}_z|u_-\rangle & = & 0 \end{array} \tag{1.38}$$

1.7 Hamiltonien

1.7.1 Quelques propriétés

Les propriétés par rapport au renversement du temps de $\hat{h}$ sont opposées à celles de $\hat{\vec{j}}$:

$$\hat{T}\hat{h}\hat{T}^{-1} = \hat{h} \tag{1.39}$$

$$\hat{T}\hat{\vec{j}}\hat{T}^{-1} = -\hat{\vec{j}} \tag{1.40}$$

Conséquences :

$$\langle\overline{a}'|\hat{h}|\overline{a}\rangle = +\langle a'|\hat{h}|a\rangle^* \tag{1.41}$$

$$\langle\overline{a}'|\hat{\vec{j}}|\overline{a}\rangle = -\langle a'|\hat{\vec{j}}|a\rangle^* \tag{1.42}$$

$$\langle a'|\hat{h}|\overline{a}\rangle = -\langle\overline{a}'|\hat{h}|a\rangle^* \tag{1.43}$$

$$\langle a'|\hat{\vec{j}}|\overline{a}\rangle = -\langle\overline{a}'|\hat{\vec{j}}|a\rangle^* \tag{1.44}$$

$$\langle\overline{b}'|\hat{h}|\overline{b}\rangle = +\langle b'|\hat{h}|b\rangle^* \tag{1.45}$$

$$\langle\overline{b}'|\hat{\vec{j}}|\overline{b}\rangle = -\langle b'|\hat{\vec{j}}|b\rangle^* \tag{1.46}$$

$$\langle b'|\hat{h}|\overline{b}\rangle = -\langle\overline{b}'|\hat{h}|b\rangle^* \tag{1.47}$$

$$\langle b'|\hat{\vec{j}}|\overline{b}\rangle = -\langle\overline{b}'|\hat{\vec{j}}|b\rangle^* \tag{1.48}$$

On a aussi les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcccc} \langle a'|\hat{j}_x|a\rangle & = & \langle a'|\hat{l}_x|a\rangle & + & \overbrace{\langle a'|\hat{s}_x|a\rangle}^{=0} \\ \langle a'|\hat{j}_x|\overline{a}\rangle & = & \underbrace{\langle a'|\hat{l}_x|\overline{a}\rangle}_{=0} & + & \langle a'|\hat{s}_x|\overline{a}\rangle \end{array} \tag{1.49}$$

$$\begin{array}{rcccc} \langle a'|\hat{j}_y|a\rangle & = & \langle a'|\hat{l}_y|a\rangle & + & \overbrace{\langle a'|\hat{s}_y|a\rangle}^{=0} \\ \langle a'|\hat{j}_y|\overline{a}\rangle & = & \underbrace{\langle a'|\hat{l}_y|\overline{a}\rangle}_{=0} & + & \langle a'|\hat{s}_y|\overline{a}\rangle \end{array} \tag{1.50}$$

$$\begin{array}{rcccc} \langle a'|\hat{j}_z|a\rangle & = & \langle a'|\hat{l}_z|a\rangle & + & \langle a'|\hat{s}_z|a\rangle \\ \langle a'|\hat{j}_z|\overline{a}\rangle & = & \underbrace{\langle a'|\hat{l}_z|\overline{a}\rangle}_{=0} & + & \underbrace{\langle a'|\hat{s}_z|\overline{a}\rangle}_{=0} \end{array} \tag{1.51}$$

$$\begin{array}{rcccc} \langle b'|\hat{j}_x|b\rangle & = & \langle b'|\hat{l}_x|b\rangle & + & \overbrace{\langle b'|\hat{s}_x|b\rangle}^{=0} \\ \langle b'|\hat{j}_x|\overline{b}\rangle & = & \underbrace{\langle b'|\hat{l}_x|\overline{b}\rangle}_{=0} & + & \langle b'|\hat{s}_x|\overline{b}\rangle \end{array} \tag{1.52}$$

$$\begin{array}{rcccc} \langle b'|\hat{j}_y|b\rangle & = & \langle b'|\hat{l}_y|b\rangle & + & \overbrace{\langle b'|\hat{s}_y|b\rangle}^{=0} \\ \langle b'|\hat{j}_y|\overline{b}\rangle & = & \underbrace{\langle b'|\hat{l}_y|\overline{b}\rangle}_{=0} & + & \langle b'|\hat{s}_y|\overline{b}\rangle \end{array} \tag{1.53}$$

$$\begin{array}{rcccc} \langle b'|\hat{j}_z|b\rangle & = & \langle b'|\hat{l}_z|b\rangle & + & \langle b'|\hat{s}_z|b\rangle \\ \langle b'|\hat{j}_z|\overline{b}\rangle & = & \underbrace{\langle b'|\hat{l}_z|\overline{b}\rangle}_{=0} & + & \underbrace{\langle b'|\hat{s}_z|\overline{b}\rangle}_{=0} \end{array} \tag{1.54}$$

1.7.2 Y-cranking

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \omega_y \hat{j}_y \tag{1.55}$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad |b\rangle \quad & \quad |\overline{b}\rangle \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle b'| \\ \\ \langle \overline{b}'| \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|b\rangle \\ -\omega_y \langle b'|\hat{l}_y|b\rangle \end{array} & \begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle \\ -\omega_y \langle b'|\hat{s}_y|\overline{b}\rangle \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} -\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle^* \\ -\omega_y \langle b'|\hat{s}_y|\overline{b}\rangle^* \end{array} & \begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|b\rangle^* \\ +\omega_y \langle b'|\hat{l}_y|b\rangle^* \end{array} \end{array} \right] \end{array} \tag{1.56}$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad |t_+\rangle \quad & \quad |t_-\rangle \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle t'_+| \\ \\ \langle t'_-| \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Re(\langle b'|\hat{h}_0|b\rangle) \\ +iRe(\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle) \\ +\omega_y Im(\langle b'|\hat{j}_y|\overline{b}\rangle) \\ -i\omega_y Im(\langle b'|\hat{j}_y|b\rangle) \end{array} & 0 \\ \\ 0 & \begin{array}{c} Re(\langle b'|\hat{h}_0|b\rangle) \\ -iRe(\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle) \\ -\omega_y Im(\langle b'|\hat{j}_y|\overline{b}\rangle) \\ -i\omega_y Im(\langle b'|\hat{j}_y|b\rangle) \end{array} \end{array} \right] \end{array} \tag{1.57}$$

1.7.3 X-cranking

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \omega_x \hat{j}_x \tag{1.58}$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad |b\rangle \qquad & \qquad |\overline{b}\rangle \qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle b'| \\ \\ \\ \langle \overline{b}'| \end{array} &
\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|b\rangle \\ -\omega_x \langle b'|\hat{l}_x|b\rangle \end{array} & \begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle \\ -\omega_x \langle b'|\hat{s}_x|\overline{b}\rangle \end{array} \\
 & \\
\begin{array}{c} -\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle^* \\ -\omega_x \langle b'|\hat{s}_x|\overline{b}\rangle^* \end{array} & \begin{array}{c} \langle b'|\hat{h}_0|b\rangle^* \\ +\omega_x \langle b'|\hat{l}_x|b\rangle^* \end{array}
\end{array}\right]
\end{array} \tag{1.59}
$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad |t_+\rangle \qquad & \qquad |t_-\rangle \qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle t'_+| \\ \\ \\ \langle t'_-| \end{array} &
\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} Re(\langle b'|\hat{h}_0|b\rangle) \\ +iRe(\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle) \end{array} & \begin{array}{c} \omega_x Re(\langle b'|\hat{j}_x|\overline{b}\rangle) \\ +iRe(\langle b'|\hat{j}_x|b\rangle) \end{array} \\
 & \\
\begin{array}{c} \omega_x Re(\langle b'|\hat{j}_x|\overline{b}\rangle) \\ -iRe(\langle b'|\hat{j}_x|b\rangle) \end{array} & \begin{array}{c} Re(\langle b'|\hat{h}_0|b\rangle) \\ -iRe(\langle b'|\hat{h}_0|\overline{b}\rangle) \end{array}
\end{array}\right]
\end{array} \tag{1.60}
$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad |a\rangle \qquad & \qquad |\overline{a}\rangle \qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle a'| \\ \\ \\ \langle \overline{a}'| \end{array} &
\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \langle a'|\hat{h}_0|a\rangle) \\ -\omega_x \langle a'|\hat{l}_x|a\rangle \end{array} & \begin{array}{c} \langle a'|\hat{h}_0|\overline{a}\rangle \\ -\omega_x \langle a'|\hat{s}_x|\overline{a}\rangle \end{array} \\
 & \\
\begin{array}{c} -\langle a'|\hat{h}_0|\overline{a}\rangle^* \\ +\omega_x \langle a'|\hat{s}_x|\overline{a}\rangle^* \end{array} & \begin{array}{c} \langle a'|\hat{h}_0|a\rangle^* \\ +\omega_x \langle a'|\hat{l}_x|a\rangle^* \end{array}
\end{array}\right]
\end{array} \tag{1.61}
$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad |u_+\rangle \qquad & \qquad |u_-\rangle \qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle u'_+| \\ \\ \\ \\ \\ \\ \langle u'_-| \end{array} &
\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} Re(\langle a'|\hat{h}_0|a\rangle) \\ +iIm(\langle a'|\hat{h}_0|\overline{a}\rangle) \\ -i\omega_x Im(\langle a'|\hat{l}_x|a\rangle) \\ +\omega_x Re(\langle a'|\hat{s}_x|\overline{a}\rangle) \end{array} & 0 \\
 & \\
0 & \begin{array}{c} Re(\langle a'|\hat{h}_0|a\rangle) \\ -iIm(\langle a'|\hat{h}_0|\overline{a}\rangle) \\ -i\omega_x Im(\langle a'|\hat{s}_x|a\rangle) \\ -\omega_x Re(\langle a'|\hat{s}_x|\overline{a}\rangle) \end{array}
\end{array}\right]
\end{array} \tag{1.62}
$$

Chapitre 2

Calcul de spectre de résonance géante avec l'oscillateur harmonique

2.1 Hamiltonien de cranking

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{A}{M}P'^{\,2}_{\alpha} + \frac{M\omega_\alpha^2}{A}X'^{\,2}_{\alpha}\right) - \omega(X'_2P'_3 - X'_3P'_2) \tag{2.1}$$

2.2 Fréquences propres

$$H' = H - \omega(r \times p) = \frac{p^2}{2m} + V - \omega(r \times p) \tag{2.2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + p \times \omega \tag{2.3}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - \omega \times r \tag{2.4}$$

donc

$$p = m\dot{r} + m(\omega \times r) \tag{2.5}$$

$$m\ddot{r} + m\omega \times \dot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + m\dot{r} \times \omega + m(\omega \times r) \times \omega \tag{2.6}$$

donc

$$\boxed{\ddot{r} = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r} - 2(\omega \times \dot{r}) - \omega \times (\omega \times r)} \tag{2.7}$$

soit, en appliquant à y et z :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \ddot{y} & = & -\omega_2^2 y + 2\omega \dot{z} + \omega^2 y \\ \ddot{z} & = & -\omega_3^2 z - 2\omega \dot{y} + \omega^2 z \end{array}} \tag{2.8}$$

posons

$$\begin{array}{rcl} y & = & \alpha \cos(\Omega t) \\ z & = & \beta \sin(\Omega t) \end{array} \tag{2.9}$$

$$2.8 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\Omega^2 + \omega_2^2 - \omega^2 & -2\omega\Omega \\ -2\omega\Omega & -\Omega^2 + \omega_3^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$(\det = 0) \Leftrightarrow \Omega^4 - (\omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega^2)\Omega^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) = 0 \tag{2.11}$$

soit

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega^2 \pm \Delta} \tag{2.12}$$

avec

$$\boxed{\Delta = \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 + 2\omega^2(\omega_2^2 + \omega_3^2)}} \tag{2.13}$$

Posons

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega^2 + \Delta \tag{2.14}$$

$$\Omega_3^2 = \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega^2 - \Delta \tag{2.15}$$

2.3 Transformation canonique

Posons

$$X_1' = \sqrt{\frac{A}{2M\omega_1}}(a_1 + h.c.) \tag{2.16}$$

$$X_2' = \alpha a_2 + \delta a_3 + h.c. \tag{2.17}$$

$$X_3' = \beta a_2 + \gamma a_3 + h.c. \tag{2.18}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{A}{2M\Omega_2}\Big(\frac{\Omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega^2}{\Omega_2^2 - \Omega_3^2}\Big)} \tag{2.19}$$

$$\beta = (-i)\sqrt{\frac{A}{2M\Omega_2}\Big(\frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2 + \omega^2}{\Omega_2^2 - \Omega_3^2}\Big)} \tag{2.20}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{A}{2M\Omega_3}\Big(\frac{\Omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega^2}{\Omega_3^2 - \Omega_2^2}\Big)} \tag{2.21}$$

$$\delta = (-i)\sqrt{\frac{A}{2M\Omega_3}\Big(\frac{\Omega_3^2 - \omega_3^2 + \omega^2}{\Omega_3^2 - \Omega_2^2}\Big)} \tag{2.22}$$

et posons

$$P_1' = \sqrt{\frac{M\omega_1}{2A}}(a_1 - h.c.) \tag{2.23}$$

$$P_2' = \beta' a_2 + \gamma' a_3 + h.c. \tag{2.24}$$

$$P_3' = \alpha' a_2 + \delta' a_3 + h.c. \tag{2.25}$$

avec

$$\alpha' = \frac{-M}{2\omega A}\big(\Omega_2^2 - \omega_2^2 - \omega^2\big)\alpha \tag{2.26}$$

$$\beta' = \frac{M}{2\omega A}\big(\Omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega^2\big)\beta \tag{2.27}$$

$$\gamma' = \frac{M}{2\omega A}\big(\Omega_3^2 - \omega_3^2 - \omega^2\big)\gamma \tag{2.28}$$

$$\delta' = \frac{-M}{2\omega A}\big(\Omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega^2\big)\delta \tag{2.29}$$

soit

$$H_1' = \frac{A}{2M}{P_1'}^2 + \frac{M\omega_1^2}{2A}{X_1'}^2 \tag{2.30}$$

$$H_2' = \frac{A}{2M}{P_2'}^2 + \frac{M\omega_2^2}{2A}{X_2'}^2 + \frac{A}{2M}{P_3'}^2 + \frac{M\omega_3^2}{2A}{X_3'}^2 - \omega(X_2'P_3' - X_3'P_2') \tag{2.31}$$

substituons 2.16 et 2.23 dans 2.30 :

$$H_1' = -\frac{\omega_1}{4}(a_1 - a_1^+)^2 + \frac{\omega_1}{4}(a_1 + a_1^+)^2 \tag{2.32}$$

$$= \frac{1}{2}\omega_1(a_1^+ a_1 + a_1 a_1^+) \tag{2.33}$$

$$= \boxed{\omega_1(a_1^+ a_1 + \frac{1}{2})} \tag{2.34}$$

Relations très utiles

$$\begin{aligned}
(\Omega_2^2 - \omega_2^2 + \omega^2)(\Omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega^2) &= \big(\frac{1}{2}(\omega_3^2 - \omega_2^2) + 2\omega^2 + \Delta\big)\big(\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_3^2) + 2\omega^2 + \Delta\big) \\
&= 4\omega^4 + \Delta^2 + 4\omega^2\Delta - \frac{1}{4}(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 \\
&= 4\omega^4 + 2\omega^2(\omega_2^2 + \omega_3^2) + 4\omega^2\Delta \\
&= 4\omega^2(\frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega^2 + \Delta) \\
&= 4\omega^2\Omega_2^2 \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega^2)(\Omega_3^2 - \omega_3^2 + \omega^2) &= \big(\frac{1}{2}(\omega_3^2 - \omega_2^2) + 2\omega^2 - \Delta\big)\big(\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_3^2) + 2\omega^2 - \Delta\big) \\
&= 4\omega^4 + \Delta^2 - 4\omega^2\Delta - \frac{1}{4}(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 \\
&= 4\omega^4 + 2\omega^2(\omega_2^2 + \omega_3^2) - 4\omega^2\Delta \\
&= 4\omega^2(\frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega^2 - \Delta) \\
&= 4\omega^2\Omega_3^2 \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Ces relations vont nous servir dans la suite pour exprimer H_2' en fonction des opérateurs de création et d'anihilation de mode a_i^+ et a_i $(i = \{2,3\})$.

Terme en a_2^2 de H_2' :

$$\langle a_2^2|H_2'|a_2^2\rangle = \frac{A}{2M}({\alpha'}^2+{\beta'}^2)+\frac{M}{2A}(\omega_2^2\alpha^2+\omega_3^2\beta^2)-\omega(\alpha\alpha'-\beta\beta') \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2M}({\alpha'}^2+{\beta'}^2) &= \frac{A}{2M}\frac{M^2}{4\omega^2A^2}\Big(\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)^2\alpha^2+\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)^2\beta^2\Big)\\
&= \frac{M}{8\omega^2A}\frac{A}{2M\Omega_2}\frac{1}{\Omega_2^2-\Omega_3^2}\Big[\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\\
&\quad -\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \frac{1}{16\omega^2\Omega_2}\frac{1}{\Omega_2^2-\Omega_3^2}\Big[\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)\\
&\quad -2\omega^2\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\\
&\quad -\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)\\
&\quad +2\omega^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \frac{1}{16\omega^2\Omega_2}\frac{1}{\Omega_2^2-\Omega_3^2}\Big[4\omega^2\Omega_2^2\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)-4\omega^2\Omega_2^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)\\
&\quad -8\omega^4\Omega_2^2+4\omega^4\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)+8\omega^4\Omega_2^2-4\omega^4\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \boxed{\frac{(\omega_3^2-\omega_2^2)(\Omega_2^2-\omega^2)}{4\Omega_2(\Omega_2^2-\Omega_3^2)}}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M}{2A}(\omega_2^2\alpha^2+\omega_3^2\beta^2) &= \frac{M}{2A}\frac{A}{2M\Omega_2}\frac{1}{\Omega_2^2-\Omega_3^2}\Big[\omega_2^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)-\omega_3^2\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \boxed{\frac{(\omega_3^2-\omega_2^2)(-\Omega_2^2-\omega^2)}{4\Omega_2(\Omega_2^2-\Omega_3^2)}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
-\omega(\alpha\alpha'-\beta\beta') &= \frac{\omega M}{2\omega A}\Big[\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)\alpha^2+\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)\beta^2\Big]\\
&= \frac{M}{2A}\frac{A}{2M\Omega_2}\frac{1}{\Omega_2^2-\Omega_3^2}\Big[\big(\Omega_2^2-\omega_2^2-\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\\
&\quad -\big(\Omega_2^2-\omega_3^2-\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \frac{1}{4\Omega_2(\Omega_2^2-\Omega_3^2)}\Big[\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)-2\omega^2\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\\
&\quad -\big(\Omega_2^2-\omega_3^2+\omega^2\big)\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)+2\omega^2\big(\Omega_2^2-\omega_2^2+\omega^2\big)\Big]\\
&= \boxed{\frac{\omega^2(\omega_3^2-\omega_2^2)}{2\Omega_2(\Omega_2^2-\Omega_3^2)}}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

---

soit

$$\boxed{\langle a_2^2|H_2'|a_2^2\rangle = 0} \tag{2.41}$$

De façon similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle a_3^2 | H_2' | a_3^2 \rangle &= 0 && (2.42)\\
\langle {a_2^+}^2 | H_2' | {a_2^+}^2 \rangle &= 0 && (2.43)\\
\langle {a_3^+}^2 | H_2' | {a_3^+}^2 \rangle &= 0 && (2.44)\\
\langle a_2 a_3 | H_2' | a_2 a_3 \rangle &= 0 && (2.45)\\
\langle a_2 a_3^+ | H_2' | a_2 a_3^+ \rangle &= 0 && (2.46)\\
\langle a_2^+ a_3 | H_2' | a_2^+ a_3 \rangle &= 0 && (2.47)\\
\langle a_2^+ a_3^+ | H_2' | a_2^+ a_3^+ \rangle &= 0 && (2.48)
\end{aligned}$$

Après substitution de 2.17,2.18,2.24 et 2.25 dans 2.31, on trouve :

$$H_2' = \sum_{\alpha=2}^{3} \Omega_\alpha \left(a_\alpha^+ a_\alpha + \frac{1}{2} \right) \tag{2.49}$$

soit finalement

$$\boxed{H' = \sum_{\alpha=1}^{3} \Omega_\alpha \left(a_\alpha^+ a_\alpha + \frac{1}{2} \right)} \tag{2.50}$$

2.3.1 Radiations dipolaires

D'après Heisenberg, on a :

$$a_\alpha(t) = a_\alpha(0) e^{-i\Omega_\alpha t} \tag{2.51}$$

Exprimons alors les opérateurs d'espace dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_1' = \sqrt{\frac{A}{2M\omega_1}} a_1(0) e^{-i\omega_1 t} + h.c. && (2.52)\\
X_2 + iX_3 &= (X_2' + iX_3') e^{i\omega t} \\
&= (\alpha + i\beta) a_2(0) e^{-i(\Omega_2 - \omega)t} \\
&\quad + (\delta + i\gamma) a_3(0) e^{-i(\Omega_3 - \omega)t} \\
&\quad + (\alpha - i\beta) a_2^+(0) e^{i(\Omega_2 + \omega)t} \\
&\quad + (\delta - i\gamma) a_3^+(0) e^{i(\Omega_3 + \omega)t} && (2.53)
\end{aligned}$$

On voit alors apparaître cinq fréquences que l'on peut classer de la façon suivante :

fréquence	moment angulaire	largeur de décroissance partielle
Ω_1	0	$e^2(\frac{\Omega_1}{c})^3(A/2M\omega_1)\langle n_1\rangle$
$\Omega_2-\omega$	-1	$e^2(\frac{\Omega_2-\omega}{c})^3\frac{1}{2}(\alpha+i\beta)^2\langle n_2\rangle$
$\Omega_3-\omega$	-1	$e^2(\frac{\Omega_3-\omega}{c})^3\frac{1}{2}(\delta+i\gamma)^2\langle n_3\rangle$
$\Omega_2+\omega$	1	$e^2(\frac{\Omega_2+\omega}{c})^3\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)^2\langle n_2\rangle$
$\Omega_3+\omega$	1	$e^2(\frac{\Omega_3+\omega}{c})^3\frac{1}{2}(\delta-i\gamma)^2\langle n_3\rangle$

FIG. 2.1 – Radiations dipolaires

Les quantités $\langle n_i\rangle$ $(i=\{1,3\})$ sont calculées de la façon suivante :

$$\langle n_\alpha\rangle = \left(e^{\Omega_\alpha/T}-1\right)^{-1} \simeq e^{-\Omega_\alpha/T} \tag{2.54}$$

On va ensuite associer à chaque radiation une fonction de Breit-Wigner de largeur Γ_c. Son expression est donnée par :

$$f(\Omega-\Omega_\alpha) = \frac{\Gamma_c}{2\pi}\left[(\Omega-\Omega_\alpha)^2+\frac{\Gamma_c^2}{4}\right]^{-1} \tag{2.55}$$

On obtient alors le spectre d'émission par rapport à l'énergie E_γ :

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma_{E1}}{dE_\gamma} &= e^2\left(\frac{\Omega_1}{c}\right)^3\frac{A}{2M\Omega_1}e^{-\Omega_1/T}f(E_\gamma-\Omega_1)\\ &+e^2\left(\frac{\Omega_2-\omega}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\alpha+i\beta)^2e^{-\Omega_2/T}f(E_\gamma-\Omega_2+\omega)\\ &+e^2\left(\frac{\Omega_3-\omega}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\delta+i\gamma)^2e^{-\Omega_3/T}f(E_\gamma-\Omega_3+\omega)\\ &+e^2\left(\frac{\Omega_2+\omega}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)^2e^{-\Omega_2/T}f(E_\gamma-\Omega_2-\omega)\\ &+e^2\left(\frac{\Omega_3+\omega}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\delta-i\gamma)^2e^{-\Omega_3/T}f(E_\gamma-\Omega_3-\omega)\end{aligned} \tag{2.56}$$

Une légère approximation permet de remplacer cette expression par la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma_{E1}}{dE_\gamma} &= e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3\frac{A}{2M\Omega_1}e^{-E_\gamma/T}f(E_\gamma-\Omega_1)\\ &+e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\alpha+i\beta)^2e^{-E_\gamma/T}e^{-\omega/T}f(E_\gamma-\Omega_2+\omega)\\ &+e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\delta+i\gamma)^2e^{-E_\gamma/T}e^{-\omega/T}f(E_\gamma-\Omega_3+\omega)\\ &+e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)^2e^{-E_\gamma/T}e^{+\omega/T}f(E_\gamma-\Omega_2-\omega)\\ &+e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3\frac{1}{2}(\delta-i\gamma)^2e^{-E_\gamma/T}e^{+\omega/T}f(E_\gamma-\Omega_3-\omega)\end{aligned} \tag{2.57}$$

On peut ensuite remarquer qu'il existe une dépendance entre cette expression et l'angle θ existant entre l'axe de rotation et le moment angulaire du photon émis. Cette dépendance peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{d\Gamma_{E1}}{dE_\gamma d\theta} = e^2\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^3e^{-E_\gamma/T}\left[P(E_\gamma)\sin^2\theta+Q(E_\gamma)\cos^2\theta\right] \tag{2.58}$$

avec

$$
\begin{aligned}
P(E_\gamma) &= \frac{A}{2M\Omega_1} f(E_\gamma - \Omega_1) \\
Q(E_\gamma) &= e^{-\omega/T}\Big[\frac{1}{2}(\alpha + i\beta)^2 f(E_\gamma - \Omega_2 + \omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\delta + i\gamma)^2 f(E_\gamma - \Omega_3 + \omega)\Big] \\
&\quad + e^{\omega/T}\Big[\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)^2 f(E_\gamma - \Omega_2 - \omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\delta - i\gamma)^2 f(E_\gamma - \Omega_3 - \omega)\Big]
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Chapitre 3

Calcul des probabilités de forme

Pour un couple (X, Y) donné, on s'intéresse à la probabilité pour le noyau d'occuper cet état de déformation. Cette probabilité peut être exprimée par un facteur de Boltzman :

$$P(X, Y, E^*) \simeq \exp(-\frac{F}{kT}) \tag{3.1}$$

où k est la constante de Boltzmann, T est la température du noyau, F est l'énergie libre, et E^* est l'énergie d'excitation du noyau.

3.1 Particules indiscernables

Considérons la densité de niveaux en fonction de l'énergie E et du nombre de particules A :

$$\rho(A, E) = \sum_{n,i} \delta(A - n)\delta(E - E_i(n)) \tag{3.2}$$

avec

$$n = \sum_{\nu}(n(\nu)) \tag{3.3}$$

$$E_i = \sum_{\nu}(n(\nu))_i \epsilon(\nu) \tag{3.4}$$

Sa transformée de Laplace est :

$$Z(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(A, E) \exp(\alpha A - \beta E) dAdE \tag{3.5}$$

$$= \sum_{i,n} \exp(\alpha n - \beta E_i(n)) \tag{3.6}$$

En utilisant 3.4, on peut l'exprimer ainsi :

$$Z(\alpha, \beta) = \prod_{\nu}(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon(\nu))) \tag{3.7}$$

Si l'on prend le logarithme de cette transformée, on obtient l'expression suivante :

$$\ln Z(\alpha, \beta) = \sum_{\nu} \ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon(\nu))) \tag{3.8}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon)) d\epsilon \tag{3.9}$$

où $g(\epsilon)$ représente la densité d'états nucléoniques :

$$g(\epsilon) = \sum_{\nu} \delta(\epsilon - \epsilon(\nu)) \tag{3.10}$$

L'entropie du noyau est donnée par :

$$S(\alpha, \beta) = -\alpha A + \beta E + \ln Z(\alpha, \beta) \tag{3.11}$$

L'énergie libre $F(\alpha, \beta)$ du noyau est donnée par :

$$F(\alpha, \beta) = E - T(\alpha, \beta) S(\alpha, \beta) \tag{3.12}$$

L'énergie libre est calculée pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$, les quantités α_0 et β_0 étant déduites des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
E^* &= E - E_0 && (3.13)\\
E &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon) f(\epsilon) \epsilon d\epsilon && (3.14)\\
E_0 &= \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} g(\epsilon) \epsilon d\epsilon && (3.15)\\
f(\epsilon) &= \left[1 + \exp(\beta_0 \epsilon - \alpha_0)\right]^{-1} && (3.16)\\
A &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon && (3.17)\\
&= \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} g(\epsilon) d\epsilon && (3.18)\\
\frac{\alpha_0}{\beta_0} &= \epsilon_{\mathrm{F}} && (3.19)\\
\beta_0^{-1} &= T && (3.20)
\end{aligned}$$

où $f(\epsilon)$ est la fonction donnant les nombres d'occupation des niveaux nucéoniques (ici de type Boltzman), et ϵ_{F} est l'énergie de Fermi.

Note : la quantité $(\alpha/\beta)_0$ est appelée potentiel chimique et vaut l'énergie de Fermi ϵ_{F} dans l'approximation d'un gaz de Fermi, approximation utilisée ici (relation 3.19).

3.2 Deux types de particules : neutrons et protons

Les quantités calculées précédemment peuvent facilement être adaptées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
S(\alpha_n, \alpha_p, \beta) &= -\alpha_n N - \alpha_p Z + \beta E + \ln Z(\alpha_n, \alpha_p, \beta) && (3.21)\\
\ln Z(\alpha_n, \alpha_p, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\epsilon) \ln(1 + \exp(\alpha_n - \beta\epsilon)) d\epsilon + \int_{-\infty}^{\infty} g_p(\epsilon) \ln(1 + \exp(\alpha_p - \beta\epsilon)) d\epsilon && (3.22)\\
(\alpha_n)_0 &= \epsilon_{\mathrm{F}}^{(n)} \beta_0 && (3.23)\\
(\alpha_p)_0 &= \epsilon_{\mathrm{F}}^{(p)} \beta_0 && (3.24)
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Scaling des variables nucléaires

Ou comment obtenir certaines variables nucléaires pour un noyau (2) les connaissant pour un noyau (1).

$$E^{(2)}_{surf} = \frac{A_2^{2/3}}{A_1^{2/3}}\Big[\frac{1 - X_{surf}T_2^2}{1 - X_{surf}T_1^2}\Big]E^{(1)}_{surf} \tag{4.1}$$

$$E^{(2)}_{coul} = \frac{Z_2^2}{Z_1^Z}\Big[\frac{A_1^{1/3}}{A_2^{1/3}}\Big]E^{(1)}_{coul} \tag{4.2}$$

$$E^{(2)}_{curv} = \frac{A_2^{1/3}}{A_1^{1/3}}\Big[\frac{1 - X_{curv}T_2^2}{1 - X_{curv}T_1^2}\Big]E^{(1)}_{curv} \tag{4.3}$$

Pour ce qui concerne l'énergie E_{LSD}, il faut calculer les quantités précédentes en retranchant l'énergie correspondant au noyau sphérique.

$$a = E^{(1)}_{surf}\Big[B_{surf}(1 - X_{surf}T_1^2)A_1^{2/3}\Big]^{-1} \tag{4.4}$$

$$E^{(2)'}_{surf} = E^{(2)}_{surf}(1 - \frac{1}{a}) \tag{4.5}$$

$$b = \frac{5}{3}E^{(1)}_{coul}A_1^{1/3}\frac{r_{0ch}}{E_{squar}Z_1^2} \tag{4.6}$$

$$E^{(2)'}_{coul} = E^{(2)}_{coul}(1 - \frac{1}{b}) \tag{4.7}$$

$$c = E^{(1)}_{curv}\Big[B_{curv}(1 - X_{curv}T_1^2)A_1^{1/3}\Big]^{-1} \tag{4.8}$$

$$E^{(2)'}_{curv} = E^{(2)}_{curv}(1 - \frac{1}{|c|}) \tag{4.9}$$

Moments d'inertie, rayons nucléaires, rayons des fragments nucléaires :

$$J^{(2)}_{x,y,z} = J^{(1)}_{x,y,z}\frac{A_2^{5/3}}{A_1^{5/3}} \tag{4.10}$$

$$R^{(2)}_{x,y,z,xf,yf,zf} = R^{(1)}_{x,y,z,xf,yf,zf}\frac{A_2^{2/3}}{A_1^{2/3}} \tag{4.11}$$

On a donc finalement :

$$E^{(2)}_{lsd} = E^{(2)'}_{surf} + E^{(2)'}_{coul} + E^{(2)'}_{curv} + \frac{I(I+1)}{2J_y^{(2)}} \tag{4.12}$$